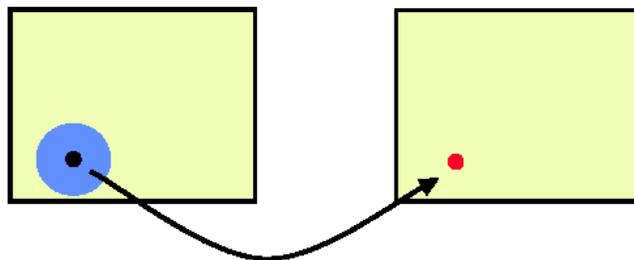
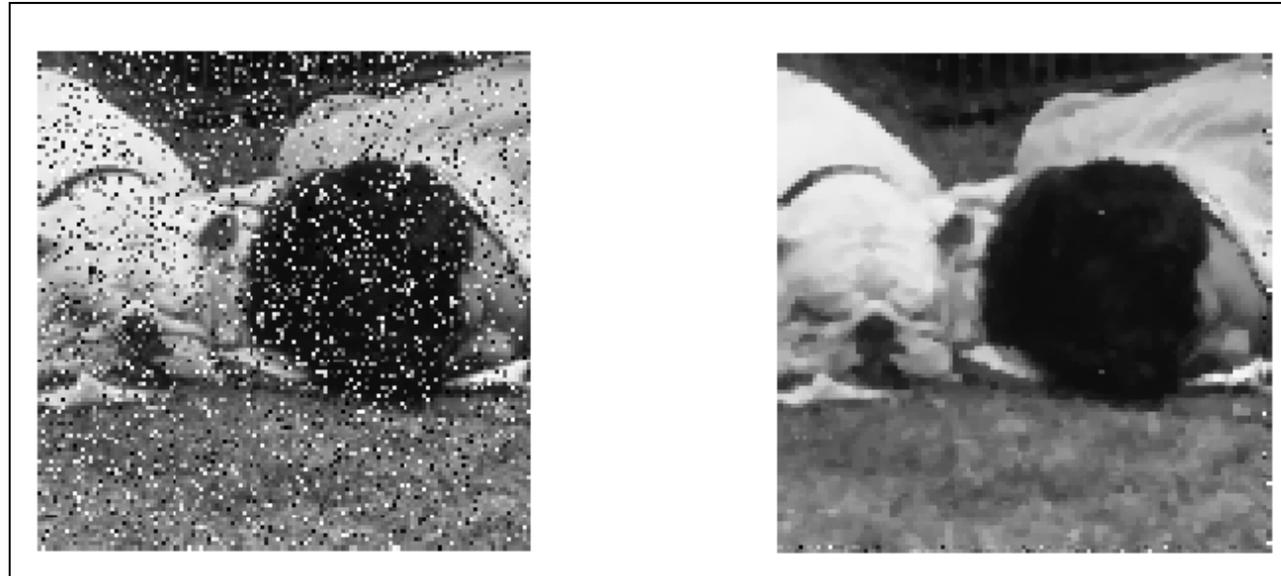


Операции над изображениями

- Точечные
- Пространственные
- Геометрические
- Алгебраические
- Покадровые

Пространственные операции



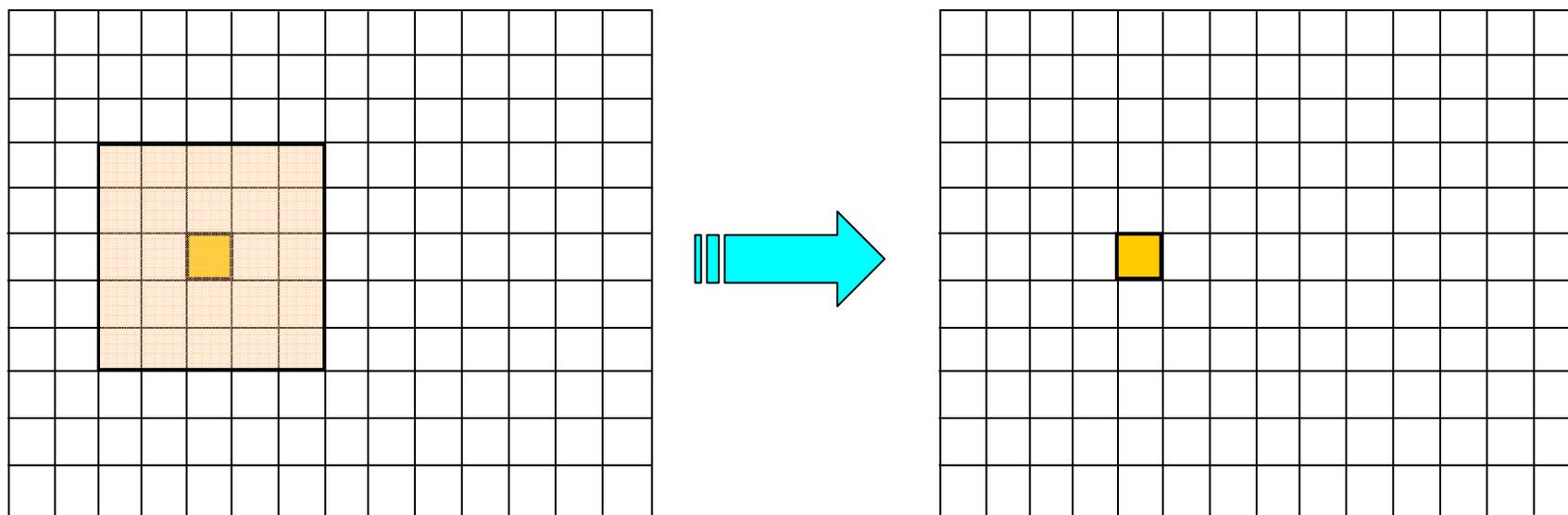
1. Результат зависит от яркости и координат пикселя
2. Результат зависит от окружающих пикселей

3. Пример:
$$I'(x,y) = \sum_{(u,v) \in \text{Окрестность}} I(u,v)$$

Область примыкания

Группа пикселей изображения, используемых в пространственных операциях. Обычно это матрица с нечётной размерностью.

Преобразуемая точка обычно в центре области примыкания.



Пример: Min/Max-фильтры



Min – фильтр

$$I'(x, y) = \min(\{I(m, n)\}_{(m, n) \in N(x, y)})$$

Max – фильтр

$$I'(x, y) = \max(\{I(m, n)\}_{(m, n) \in N(x, y)})$$



Применение Min/Max-фильтров

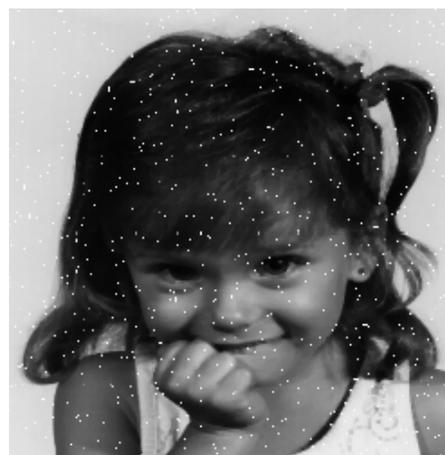
Исходное
изображение



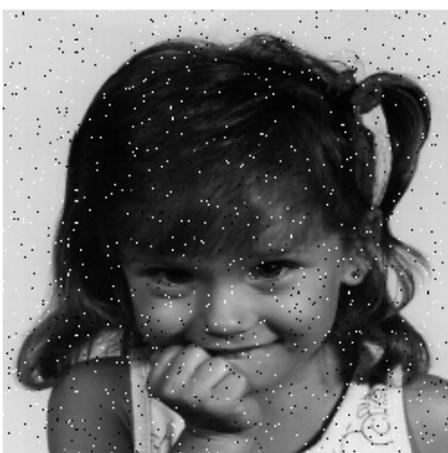
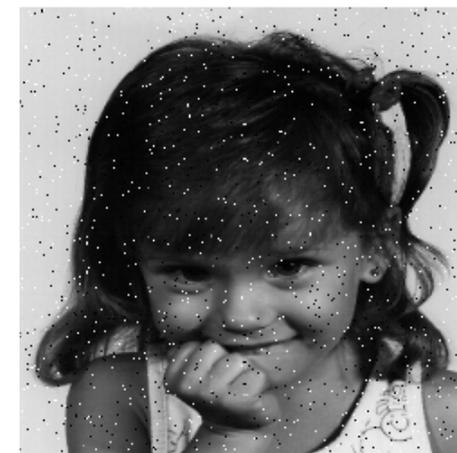
Min(I)
окрестность 2×2



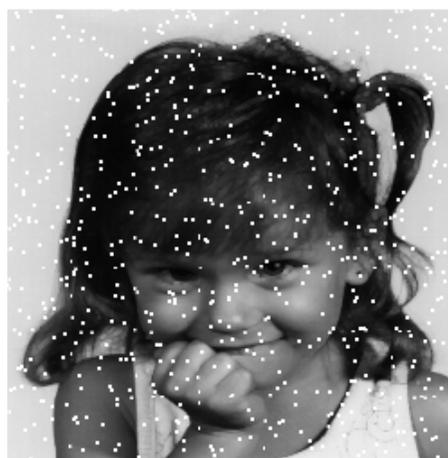
MinMax(I)



Шум «соль с перцем»



Шум «соль с перцем»



Max(I)
окрестность 2×2



MaxMin (I)



MaxMin (MinMax(I))

Медианный фильтр

$$I'(x, y) = \text{med}(\{I(m, n)\}_{(m, n) \in N(x, y)})$$

30	10	20
10	250	25
20	25	30

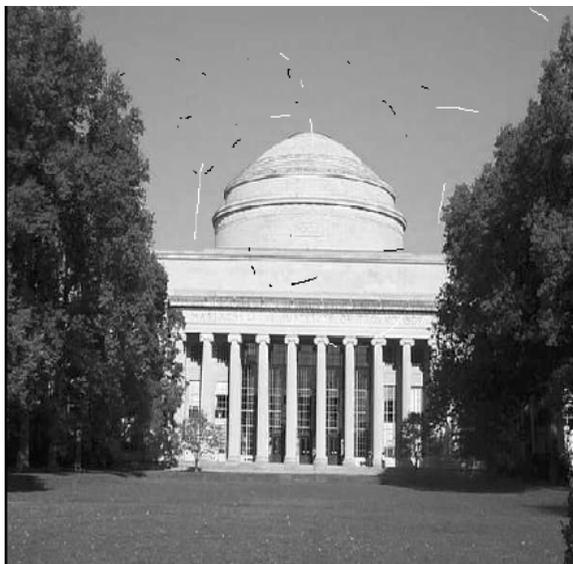
→ 10, 10, 20, 20, 25, 25, 30, 30, 250



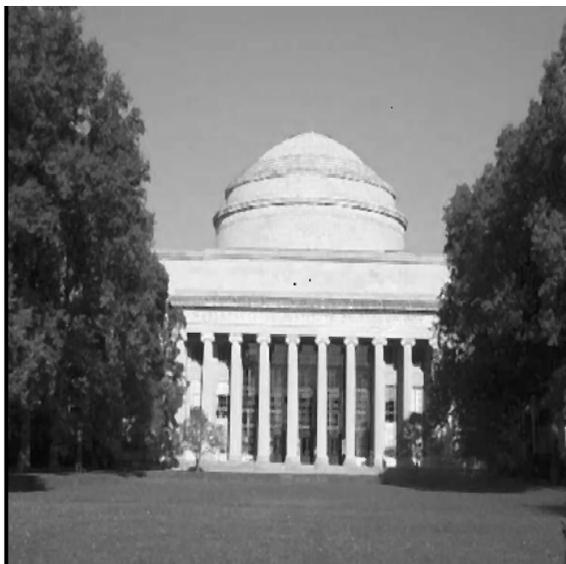
Медиана



Медианный фильтр, окрестность 3×3



Исходное изображение



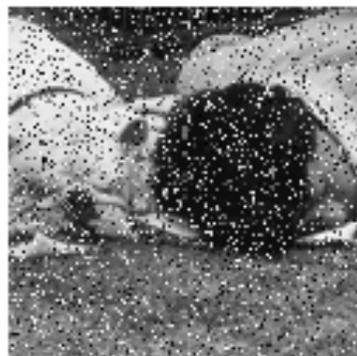
Медианный фильтр 3×3



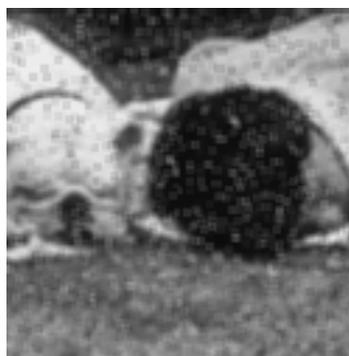
Медианный фильтр 5×5

Среднеарифметический фильтр

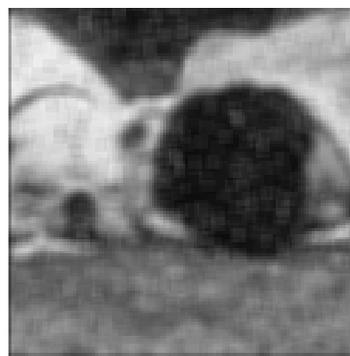
$$I'(x, y) = \text{mean}(\{I(m, n)\}_{(m, n) \in N(x, y)}) = \\ = \frac{1}{|N|} \sum_{(m, n) \in N(x, y)} I(m, n)$$



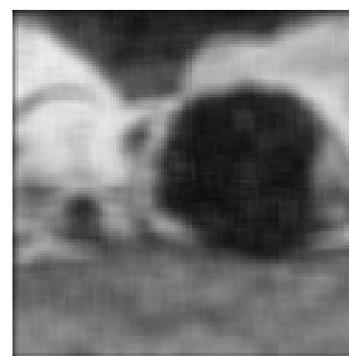
Шум
«соль с перцем»



3×3
Среднеарифметические



5×5



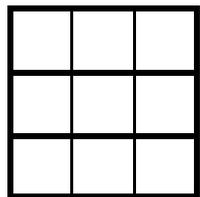
7×7
фильтры



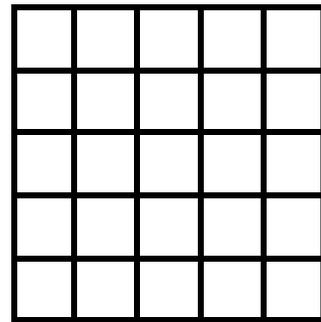
Медианный
фильтр

Окрестности

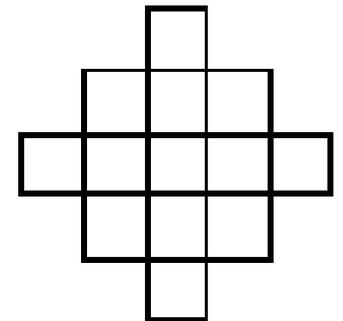
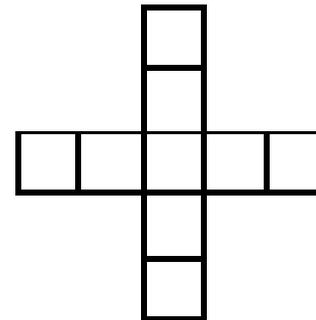
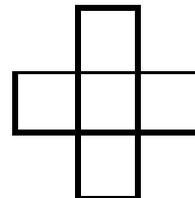
Форма окрестности выбирается в широких пределах



3 x 3



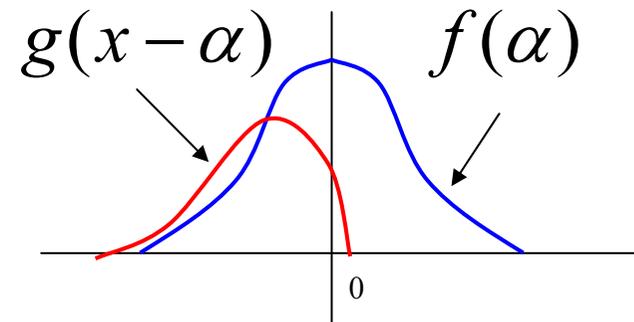
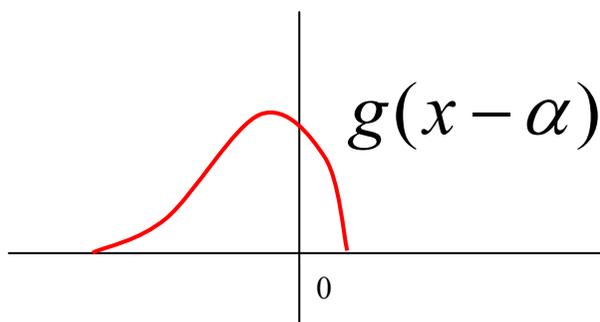
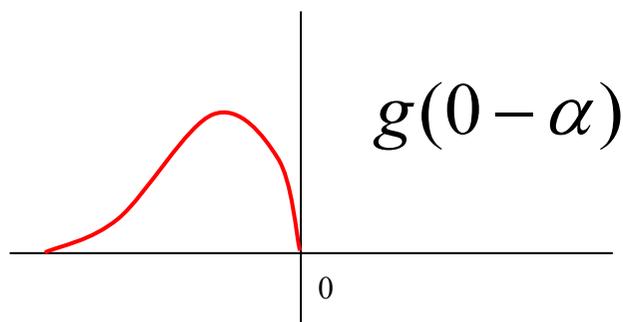
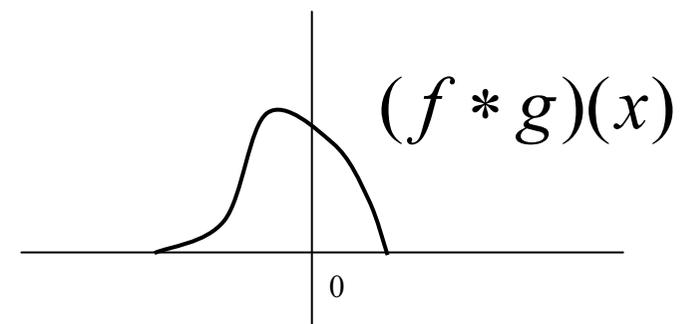
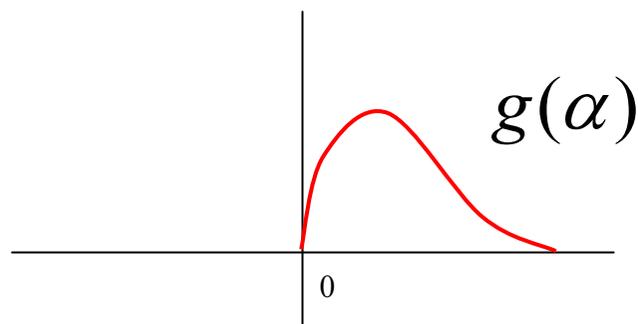
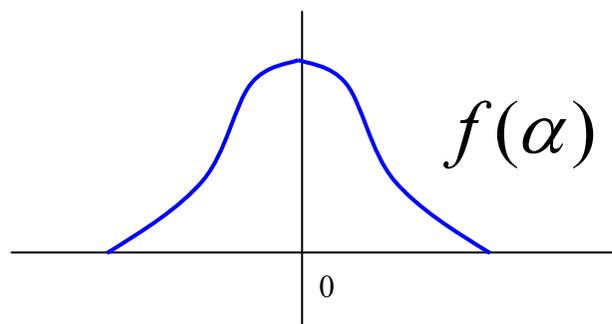
5 x 5



Свёртка – одномерный случай

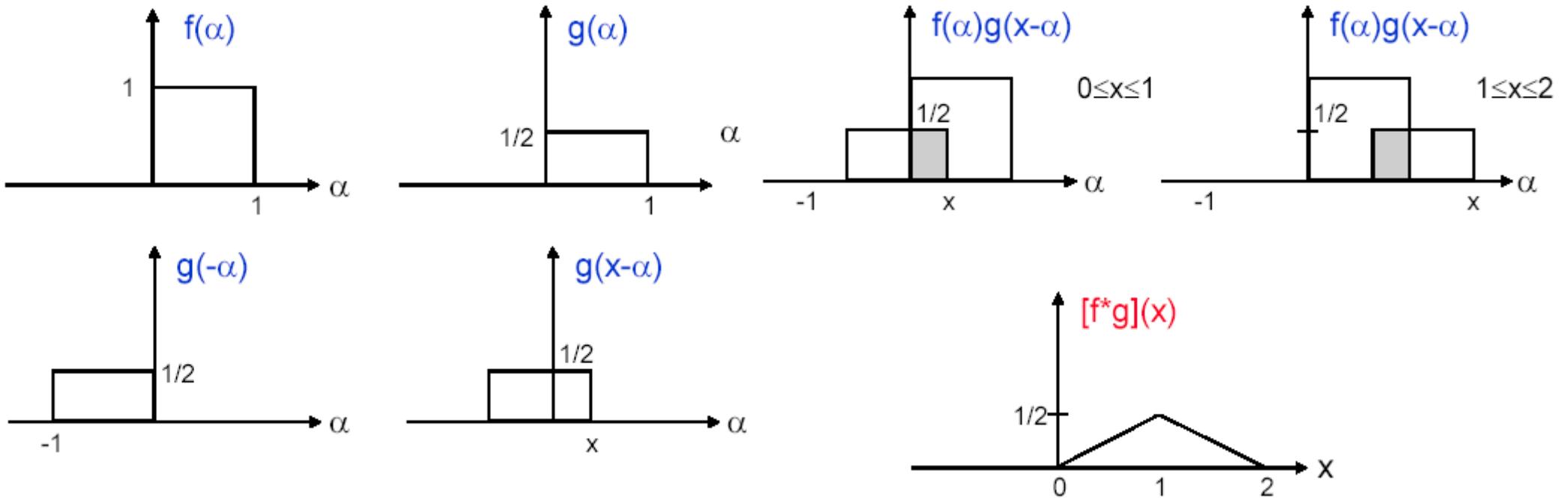
$f(x), g(x)$ - функции на $(-\infty, +\infty)$

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \cdot g(x - \alpha) d\alpha - \text{свёртка функций}$$



Пример свёртки

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \cdot g(x - \alpha) d\alpha$$



Свойства свёртки

Коммутативность

$$(f * g) = (g * f)$$

Ассоциативность

$$((f * g) * h) = (f * (g * h))$$

Линейность

$$(f * (\alpha \cdot g + \beta \cdot h)) = \alpha \cdot (f * g) + \beta \cdot (f * h)$$

Инвариантность к сдвигу

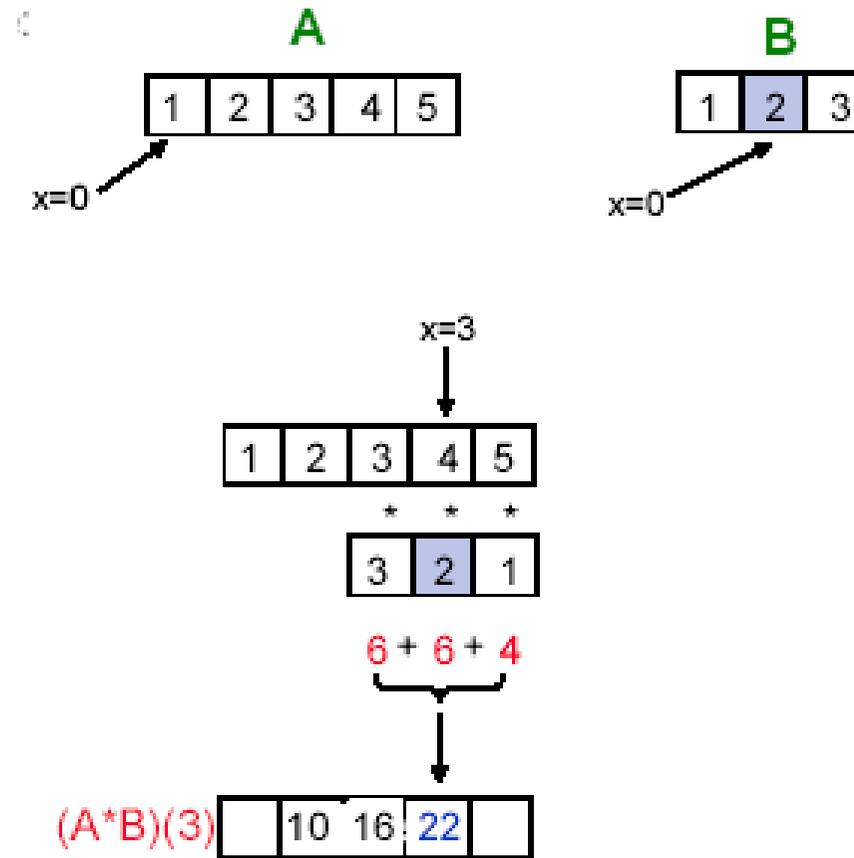
$$(f * g(x - x_0)) = (g * f)(x - x_0)$$

Одномерная дискретная свёртка

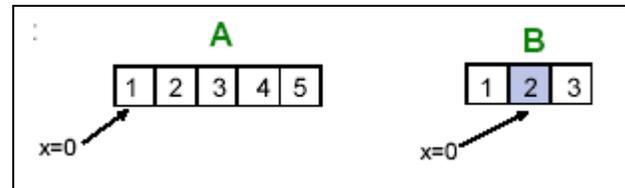
A, B – изображения,

B называется маской и обычно B меньше A

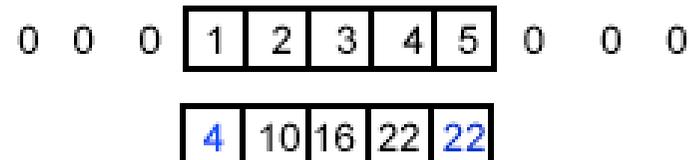
$$(A * B)(x) = \sum_i A(i)B(x - i)$$



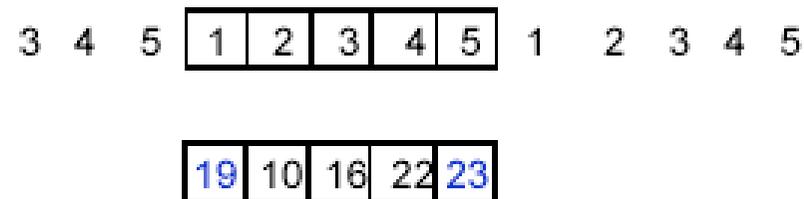
Обработка края изображения



Вариант 1 – **заполнение нулями**



Вариант 2 – **склейка в кольцо**

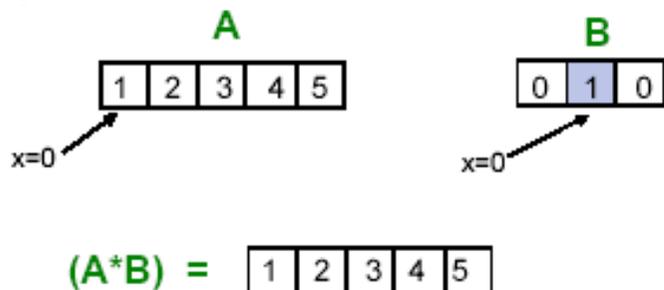


Вариант 3 – **отражение**

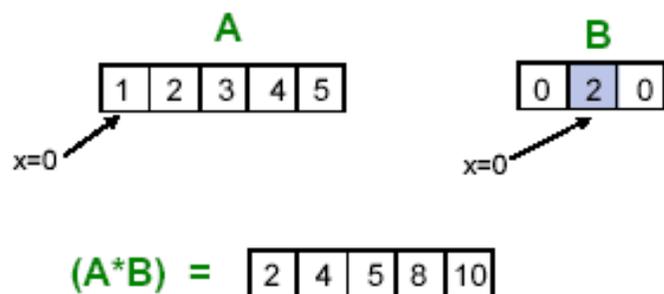


Примеры одномерной свёртки

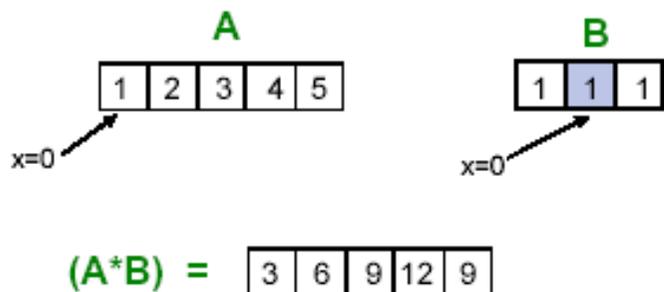
Пример 1



Пример 2

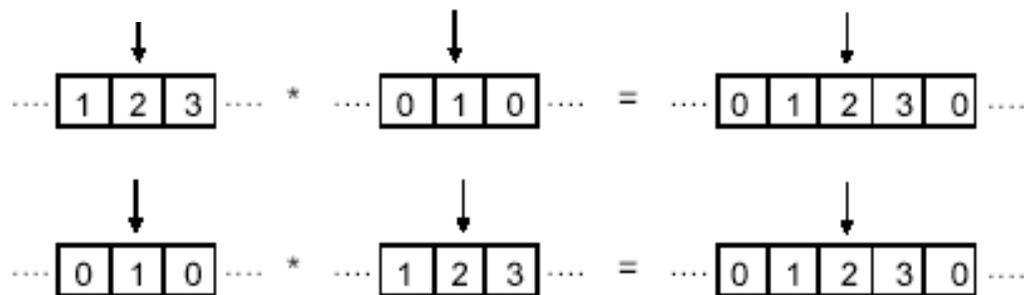


Пример 3

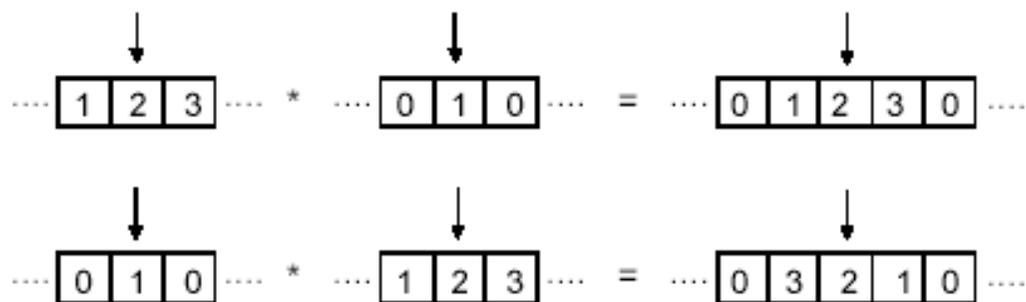


Необходимость отражения маски

С отражением



Без отражения



Отражение необходимо для обеспечения коммутативности свёртки

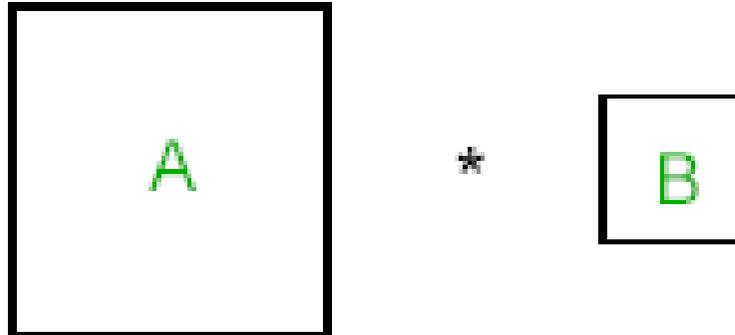
Свёртка – двумерный случай

$f(x, y), g(x, y)$ - функции на $(-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$

$$(f * g)(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) \cdot g(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta$$

свёртка функций

Двумерная дискретная свёртка



$$(A * B)(x, y) = \sum_i \sum_j A(i, j) \cdot B(x - i, y - j)$$

Пространственная частота

Пространственная частота – это скорость изменения яркости элементов изображения.

Высокая пространственная частота – резкие близко расположенные изменения значений яркости элементов изображения.

Низкая пространственная частота – большие области постоянных или медленно меняющихся значений яркости элементов изображения.

Низкочастотные фильтры

Ослабляют высокочастотные компоненты, снижают шум.

1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9

3 X 3

1/25	1/25	1/25	1/25	1/25
1/25	1/25	1/25	1/25	1/25
1/25	1/25	1/25	1/25	1/25
1/25	1/25	1/25	1/25	1/25
1/25	1/25	1/25	1/25	1/25

5 X 5

Визуальный эффект – снижение резкости изображения.

$$\begin{pmatrix} 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/10 & 1/10 & 1/10 \\ 1/10 & 1/5 & 1/10 \\ 1/10 & 1/10 & 1/10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/16 & 1/8 & 1/16 \\ 1/8 & 1/4 & 1/8 \\ 1/16 & 1/8 & 1/16 \end{pmatrix}$$

Гауссовы фильтры низких частот



$$e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}$$

Дискретный случай

1/6 x

0	1	0
1	2	1
0	1	0

1/81 x

1	2	3	2	1
2	4	6	4	2
3	6	9	6	3
2	4	6	4	2
1	2	3	2	1

Гауссово сглаживание



Исходное изображение



Сглаживание $\sigma = 5$



Сглаживание $\sigma = 9$

Высокочастотные фильтры

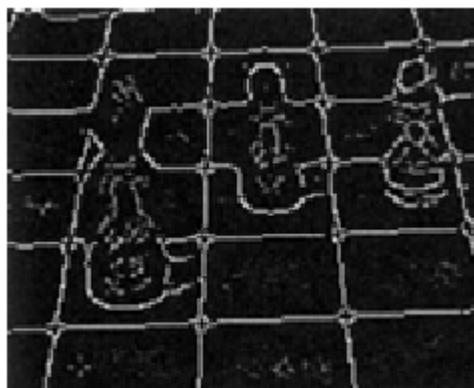
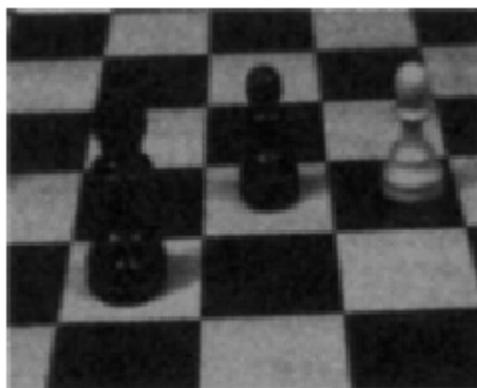
Выделяют высокочастотные компоненты

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Большие изменения интенсивности усиливаются, а области постоянной интенсивности остаются неизменными

Выделение края

Край – область с большим перепадом интенсивности



Оператор Лапласа

Функция Лапласа: $L(f(x, y)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

Разностное представление:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f(x+1, y) - f(x, y) \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x-1, y) = f(x, y) - f(x-1, y) \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x-1, y) = f(x+1, y) - 2f(x, y) + f(x-1, y) \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x+1, y) - 2f(x, y) + f(x-1, y) \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(x, y+1) - 2f(x, y) + f(x, y-1) \quad (5)$$

Функция Лапласа:

$$L(f(x, y)) = f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1) - 4f(x, y)$$

Ядро свёртки:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

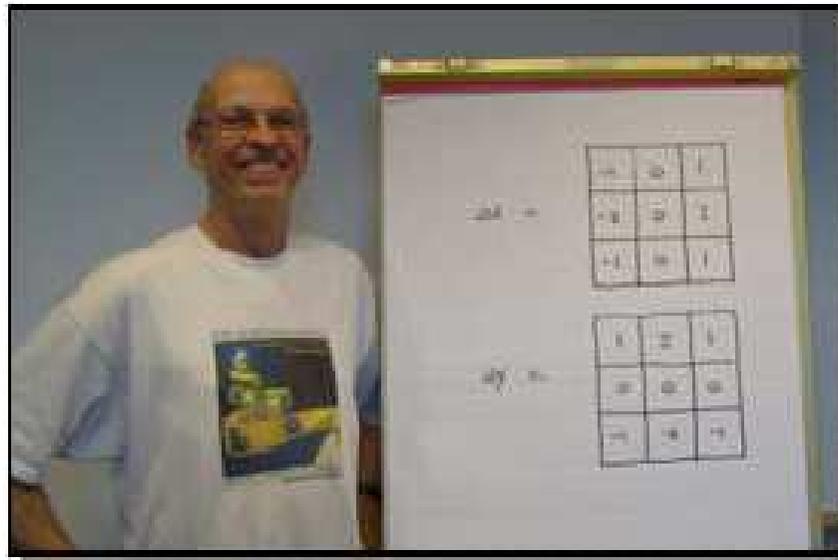
Ослабляет низкочастотные компоненты.

Области постоянной яркости становятся чёрными.

Оператор Собеля

Свёртка с двумя ядрами в отдельности и
выбор максимального значения

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Irwin Sobel
Palo Alto, 2007

Оператор Превит (Prewitt)

Аналогичный оператору Собеля

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Оператор Кирша

Восемь ядер свёртки

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -3 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 5 & 0 & -3 \\ 5 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 5 & 0 & -3 \\ 5 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 5 & -3 \\ 5 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Выбирается максимальное значение по всем 8 свёрткам. Индекс даёт направление края.

Выделение края вычитанием



Исходное изображение



Сглаживание
гауссианом (5×5)



Сглаженный
минус исходный
(умножение на 4 и
осветление на 128)